

ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА

В. В. Колыбасова, Н. Ч. Крутицкая, А. В. Овчинников

k . Отвечающие ему собственные векторы — это ненулевые решения однородной системы линейных уравнений с матрицей

$$B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rang } B = k - 1$, так что размерность собственного подпространства равна 1, то существует лишь один линейно независимый собственный вектор. Таким образом, при $k \geq 2$ не существует базиса, состоящего из собственных векторов этого оператора, то есть ни в одном базисе матрица оператора не может иметь диагонального вида. Матрица $J_k(\lambda_0)$ называется *жордановой клеткой порядка k* , соответствующей собственному значению λ_0 .

1.3. Присоединенные векторы. Элемент x называется *присоединенным вектором* оператора A , отвечающим собственному значению λ , если для некоторого натурального числа $m \geq 1$ выполняются соотношения

$$(A - \lambda I)^{m-1}x \neq 0, \quad (A - \lambda I)^m x = 0.$$

При этом число m называется *высотой* присоединенного вектора x . Иными словами, если x — присоединенный вектор высоты m , то элемент $(A - \lambda I)^{m-1}x$ является собственным вектором оператора A . Очевидно, собственные векторы — это присоединенные векторы высоты 1 (здесь $(A - \lambda I)^0 = I$).

Рассмотрим последовательность векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$, для которых выполнены соотношения ($e_1 \neq 0$):

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \lambda e_1, \\ Ae_2 &= \lambda e_2 + e_1, \\ Ae_3 &= \lambda e_3 + e_2, \\ &\vdots \\ Ae_m &= \lambda e_m + e_{m-1} \end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)e_1 &= 0 & \implies & (A - \lambda I)e_1 = 0, \\ (A - \lambda I)e_2 &= e_1 & \implies & (A - \lambda I)^2 e_2 = 0, \\ (A - \lambda I)e_3 &= e_2 & \implies & (A - \lambda I)^3 e_3 = 0, \\ \dots & \dots & & \dots \\ (A - \lambda I)e_m &= e_{m-1} & \implies & (A - \lambda I)^m e_m = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, цепочка векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$ состоит из собственного вектора e_1 и присоединенных векторов $e_2, \dots, e_m$ (высота присоединенного вектора e_k равна k).

Введем обозначение $B = A - \lambda I$ и запишем предыдущие соотношения в виде

$$\begin{aligned} Be_1 &= 0 & \implies & Be_1 = 0, \\ Be_2 &= e_1 & \implies & B^2 e_2 = 0, \\ Be_3 &= e_2 & \implies & B^3 e_3 = 0, \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ Be_m &= e_{m-1} & \implies & B^m e_m = 0. \end{aligned}$$

Теорема. Векторы $e_1, \dots, e_m$ линейно независимы.

Отметим, что в случае, когда количество векторов $e_1, \dots, e_m$ равно размерности пространства, т.е. $m = n$, эти векторы образуют базис в R_n , а матрица оператора A в этом базисе имеет вид жордановой клетки порядка n с числом λ на диагонали (см. (1)).

1.4. Жорданов блок. Жордановым блоком, отвечающим собственному значению λ_0 , называется блочно-диагональная матрица, каждый блок которой представляет собой жорданову клетку вида (1):

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i_1}(\lambda_0)} & & & \\ & \boxed{J_{i_2}(\lambda_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{i_s}(\lambda_0)} \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали матрицы расположены s жордановых клеток $J_{i_1}(\lambda_0), J_{i_2}(\lambda_0), \dots, J_{i_s}(\lambda_0)$ порядков $i_1, i_2, \dots, i_s$, где s — геометрическая кратность собственного значения λ_0 . Сумма порядков этих клеток равна алгебраической кратности собственного значения λ_0 , т.е.

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s = m.$$

Все элементы матрицы вне жордановых клеток равны нулю. Порядок расположения жордановых клеток в матрице $A(\lambda_0)$ определен неоднозначно.

Примеры жордановых блоков. Рассмотрим простой случай, когда характеристический многочлен матрицы имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m$$

и геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна s .

Пример 1. Пусть $m = 2, s = 1$. Тогда

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix};$$

имеем одну жорданову клетку порядка 2.

Пример 2. Пусть $m = 3, s = 1$. Тогда

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix};$$

имеем одну жорданову клетку порядка 3.

Пример 3. Пусть $m = 3$, $s = 2$. Имеем жорданов блок, состоящий из двух жордановых клеток порядков 1 и 2:

$$A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right) \quad \text{либо} \quad A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right).$$

Пример 4. Пусть $m = 4$, $s = 1$. В этом случае имеется одна клетка:

$$A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{cccc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right).$$

Пример 5. Пусть $m = 4$, $s = 2$. Этой ситуации отвечает жорданов блок, состоящий из двух клеток, но порядки клеток однозначно не определяются: либо имеем две клетки порядка 2 каждая, либо две клетки, одна из которых имеет порядок 1, а вторая — порядок 3:

$$A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right), \quad \text{либо} \quad A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right), \quad \text{либо}$$

$$A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right).$$

Пример 6. Пусть $m = 4$, $s = 3$. Тогда жорданов блок состоит из трех клеток:

$$A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right), \quad \text{либо} \quad A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right), \quad \text{либо}$$

$$A(\lambda_0) = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right).$$

1.5. Теорема о жордановой форме матрицы оператора. Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве над полем комплексных чисел размерности n и его характеристический многочлен имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p},$$

где $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n.$$

Тогда в этом пространстве существует базис, состоящий из собственных и присоединенных векторов оператора A , в котором матрица оператора имеет блочно-диагональную

форму (она называется жордановой формой)

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{A(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A(\lambda_p)} \end{pmatrix},$$

где $A(\lambda_j)$ — жорданов блок, соответствующий собственному значению λ_j . Указанный базис называется *жордановым*.

Сформулированная теорема верна и в случае, когда линейный оператор действует в линейном пространстве над произвольным числовым полем $\mathbb{K}$, но все корни характеристического многочлена принадлежат полю $\mathbb{K}$.

Рассмотрим примеры. Обозначаем через n размерность пространства, m_j и s_j — алгебраическую и геометрическую кратности собственного значения λ_j соответственно.

Пример 1. Пусть $n = 2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда матрица оператора может быть приведена к диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $n = 3$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = 2$, $s_1 = 1$) и λ_2 ($m_2 = s_2 = 1$). Тогда матрица оператора может быть приведена к виду

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть $n = 4$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = 3$, $s_1 = 1$) и λ_2 ($m_2 = s_2 = 1$). Тогда

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $n = 4$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = s_1 = 2$) и λ_2 ($m_2 = s_2 = 2$). Тогда

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Пусть $n = 4$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = 2$, $s_1 = 1$) и λ_2 ($m_2 = 2$, $s_2 = 1$). Тогда

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Пусть $n = 4$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = 2$, $s_1 = 1$) и λ_2 ($m_2 = 2$, $s_2 = 2$). Тогда

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right).$$

§2. Построение жорданова базиса и жордановой формы матрицы

Пусть λ — собственное значение оператора, m и s — алгебраическая и геометрическая кратности числа λ . Опишем построение линейно независимой совокупности из m собственных и присоединенных векторов, отвечающих данному λ . Этой совокупности векторов в жордановой матрице A' будет соответствовать жорданов блок $A(\lambda)$ (см. § 1).

Обозначим:

$$B = A - \lambda I, \quad B^k = (A - \lambda I)^k, \quad N_k = \ker B^k, \quad n_k = \dim N_k, \quad r_k = \text{rang } B^k.$$

Ясно, что $n_k + r_k = n$. Для удобства считаем, что $B^0 = I$, так что $r_0 = n$, $n_0 = 0$.

Поскольку $\text{rang } B^{k+1} \leq \text{rang } B^k$, имеем $n_{k+1} \geq n_k$, так что

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$$

Теорема. Существует такое натуральное число q , что

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = N_{q+2} = \dots,$$

т.е. все ядра с номером, большим, чем q , совпадают с ядром N_q . При этом $n_1 = s$, $n_q = m$.

Построим часть жорданова базиса, соответствующую данному собственному значению λ , следующим образом.

1. Возводя матрицу B в последовательные натуральные степени, найдем показатель q , начиная с которого ранг степеней матрицы B перестает уменьшаться.

2. Рассмотрим ядра N_q и N_{q-1} . Пусть векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots \in N_q$ достраивают произвольный базис пространства N_{q-1} до базиса пространства N_q ; их количество равно $n_q - n_{q-1}$. Эти векторы являются присоединенными векторами высоты q , и каждый из них порождает цепочку, состоящую из q векторов, которые войдут в состав жорданова базиса. Каждой такой цепочке будет соответствовать жорданова клетка порядка q ; таким образом, в состав жордановой формы матрицы оператора A войдет $n_q - n_{q-1}$ жордановых клеток порядка q .

3. Рассмотрим ядра N_{q-1} и N_{q-2} , а также векторы $B\mathbf{f}_1, B\mathbf{f}_2, \dots$; их количество равно

$$n_q - n_{q-1} = (n - r_q) - (n - r_{q-1}) = r_{q-1} - r_q.$$

К этим векторам добавим векторы $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots$ из пространства N_{q-1} так, чтобы система векторов

$$B\mathbf{f}_1, B\mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots \in N_{q-1}$$

дополняла произвольный базис ядра N_{q-2} до базиса ядра N_{q-1} . Векторы $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots$ являются присоединенными векторами высоты $q-1$, и каждому из них будет соответствовать,

во-первых, цепочка векторов жорданова базиса, и во-вторых, жорданова клетка порядка $q - 1$. Количество добавляемых векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots$ равно

$$n_{q-1} - n_{q-2} - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2} = r_q - 2r_{q-1} + r_{q-2};$$

таким же будет количество жордановых клеток порядка $q - 1$.

4. Рассмотрим ядра N_{q-2} и N_{q-3} и векторы $B^2\mathbf{f}_1, B^2\mathbf{f}_2, \dots, B\mathbf{g}_1, B\mathbf{g}_2, \dots$. К этим векторам (если их не хватает) добавим векторы $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots$ из пространства N_{q-2} так, чтобы совокупность векторов

$$B^2\mathbf{f}_1, B^2\mathbf{f}_2, \dots, B\mathbf{g}_1, B\mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots \in N_{q-2}$$

дополняла произвольный базис пространства N_{q-3} до базиса пространства N_{q-2} . Количество добавляемых векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots$ равно

$$n_{q-2} - n_{q-3} - (n_{q-1} - n_{q-2}) = -n_{q-1} + 2n_{q-2} - n_{q-3} = r_{q-1} - 2r_{q-2} + r_{q-3};$$

таким же будет количество жордановых клеток порядка $q - 2$.

Процесс продолжаем аналогично. Наконец, рассмотрим ядро N_1 и векторы

$$\left. \begin{array}{l} B^{q-1}\mathbf{f}_1, B^{q-1}\mathbf{f}_2, \dots, \\ B^{q-2}\mathbf{g}_1, B^{q-2}\mathbf{g}_2, \dots, \\ B^{q-3}\mathbf{h}_1, B^{q-3}\mathbf{h}_2, \dots, \\ B\mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_2, \dots \end{array} \right\} \in N_1.$$

Если эта система не образует базис пространства N_1 , то добавим собственные векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ так, чтобы пополненная система являлась базисом в N_1 .

Итак, мы описали процесс построения жорданова базиса и выяснили, что количество жордановых клеток порядка k , входящих в состав жордановой формы матрицы оператора, может быть найдено по формуле

$$t_k = -n_{k+1} + 2n_k - n_{k-1} = r_{k+1} - 2r_k + r_{k-1}.$$

Построенную часть жорданова базиса, состоящую из m векторов, соответствующих данному λ (m — алгебраическая кратность этого собственного значения), запишем в таблицу («жорданова лестница»):

N_q	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\dots$										
N_{q-1}	$B\mathbf{f}_1$	$B\mathbf{f}_2$	$\dots$	$\mathbf{g}_1$	$\mathbf{g}_2$	$\dots$							
N_{q-2}	$B^2\mathbf{f}_1$	$B^2\mathbf{f}_2$	$\dots$	$B\mathbf{g}_1$	$B\mathbf{g}_2$	$\dots$	$\mathbf{h}_1$	$\mathbf{h}_2$	$\dots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				
N_1	$B^{q-1}\mathbf{f}_1$	$B^{q-1}\mathbf{f}_2$	$\dots$	$B^{q-2}\mathbf{g}_1$	$B^{q-2}\mathbf{g}_2$	$\dots$	$B^{q-3}\mathbf{h}_1$	$B^{q-3}\mathbf{h}_2$	$\dots$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\dots$	

Все векторы таблицы линейно независимы, и их число равно m (алгебраической кратности собственного значения λ). Каждому столбцу этой таблицы соответствует одна жорданова клетка, порядок которой равен высоте столбца. Количество столбцов жордановой лестницы, т.е. полное количество жордановых клеток в блоке, соответствующем собственному значению λ , равно геометрической кратности s этого собственного значения.

Будем нумеровать векторы построенной части базиса по столбцам жордановой лестницы: внутри каждого столбца снизу вверх, а сами столбцы в произвольном порядке.

Например, пусть $e_1, \dots, e_q$ — векторы первого столбца жордановой лестницы. Тогда

$$\begin{array}{lll} e_1 = B^{q-1}f_1, & Be_1 = 0, & Ae_1 = \lambda e_1, \\ e_2 = B^{q-2}f_1, & Be_2 = e_1, & Ae_2 = \lambda e_2 + e_1, \\ \vdots & \Rightarrow \quad \vdots & \Rightarrow \quad \vdots \\ e_{q-1} = Bf_1, & Be_{q-1} = e_{q-2}, & Ae_{q-1} = \lambda e_{q-1} + e_{q-2}, \\ e_q = f_1, & Be_q = e_{q-1}, & Ae_q = \lambda e_q + e_{q-1}. \end{array}$$

Этой группе векторов (собственный вектор e_1 и присоединенные к нему векторы $e_2, \dots, e_q$) жорданова базиса соответствуют первые q столбцов матрицы A' , которые имеют вид

$$\begin{bmatrix} J_q(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $J_q(\lambda)$ — жорданова клетка порядка q с числом λ на главной диагонали.

В следующих q столбцах матрицы A' , определенных векторами второго столбца жордановой лестницы, расположена жорданова клетка $J_q(\lambda)$ так, что числа λ стоят на главной диагонали матрицы A' , а элементы вне клетки равны нулю. Подобным образом для данного λ получаем m столбцов матрицы A' . На этих m столбцах находится жорданов блок $A(\lambda)$.

Для других собственных значений эта схема повторяется, в результате чего получим жорданову матрицу A' , указанную в § 1, и соответствующий жорданов базис.

§3. Примеры решения задач

Дана матрица A линейного оператора в некотором базисе. Требуется найти жорданов базис и жорданову форму матрицы оператора в этом жордановом базисе. Рассмотрим примеры решения такой задачи методом построения жорданова базиса, описанным в § 2.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^3$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 3, т.е. $m = 3$. Матрица $B = A - \lambda I$ равна

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$r_1 = \text{rang } B = 1, \quad n_1 = n - r_1 = 3 - 1 = 2.$$

Собственные векторы находим, решив однородную систему линейных уравнений $BX = O$; фундаментальная совокупность решений состоит из двух векторов, например,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Количество этих векторов (т.е. геометрическая кратность собственного значения) равно двум, $s = 2$, так что для построения жорданова базиса требуется еще один присоединенный вектор.

Так как $B^2 = O$, то ядро N_2 оператора B^2 совпадает со всем пространством, т.е. $n_2 = 3$, и при этом $q = 2$.

Дополним базис ядра N_1 , т.е. набор векторов (2), до базиса ядра N_2 , например, вектором

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_2, \notin N_1.$$

Тогда

$$B\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in N_1.$$

Дополним вектор $B\mathbf{f}_1$ до базиса пространства N_1 вектором

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_1.$$

Построим жорданову лестницу:

N_2	$\mathbf{f}_1$	
N_1	$B\mathbf{f}_1$	$\mathbf{g}$

Жорданов базис:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = B\mathbf{f}_1 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{соответствует жорданова клетка порядка 2,}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{g} \Rightarrow \text{соответствует жорданова клетка порядка 1.}$$

При этом

$$B\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \quad B\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \quad B\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

т.е. $\mathbf{e}_1$ — собственный вектор, $\mathbf{e}_2$ — его присоединенный вектор, $\mathbf{e}_3$ — собственный вектор.

В жордановом базисе

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица оператора A' имеет вид

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6 - \lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3$$

имеет корень $\lambda = 1$ кратности 3, т.е. $m = 3$. Матрица $B = A - \lambda I$ равна

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

и мы имеем

$$r_1 = 2, \quad n_1 = 1.$$

Фундаментальная совокупность решений системы $BX = O$ состоит из одного вектора, например,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_1.$$

Следовательно, геометрическая кратность собственного значения равна единице:

$$s = 1.$$

Далее, матрица B^2 равна

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix};$$

для нее имеем

$$r_2 = 1, \quad n_2 = 2,$$

и базис ядра N_2 состоит из двух векторов, например,

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $B^3 = O$, так что

$$r_3 = 0, \quad n_3 = 3,$$

то ядро N_3 оператора B^2 совпадает со всем пространством, т.е. $q = 3$.

Вектором $\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0)^T$ дополним базис ядра N_2 до базиса пространства N_3 . Вектор $B\mathbf{f}_1 = (0, -2, -1)^T$ дополняет базис ядра N_1 (т.е. вектор $(3, 1, 1)^T$) до базиса ядра N_2 . Вектор $B^2\mathbf{f}_1 = (3, 1, 1)^T$ образует базис пространства N_1 . Жорданова лестница имеет вид

N_3	$\mathbf{f}_1$
N_2	$B\mathbf{f}_1$
N_1	$B^2\mathbf{f}_1$

Жорданов базис:

$$\mathbf{e}_1 = B^2\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = B\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{e}_1$ — собственный вектор, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ — два его присоединенных вектора.

Матрица оператора A' имеет вид жордановой клетки

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7 - \lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\lambda^2$$

имеет два корня: $\lambda_1 = 0$ кратности $m_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$ кратности $m_2 = 1$.

Рассмотрим собственное значение $\lambda_1 = 0$. Матрица

$$B = (A - \lambda_1 I) = (A - 0 \cdot I) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r_1 = 2$, так что $n_1 = 1$, а фундаментальная совокупность решений однородной системы $BX = O$ состоит из одного вектора, например, $(1, 2, 3)^T$. Следовательно, геометрическая кратность рассматриваемого собственного значения равна $s = 1$.

Далее,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = B^2.$$

Таким образом, ядра N_2 и N_3 совпадают, так что $q = 2$.

Находим базис ядра N_2 , который является фундаментальной совокупностью решений системы $B^2X = O$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

При этом $r_2 = 1$, $s_2 = n_2 = 2$.

Дополним базис в N_1 до базиса в N_2 вектором $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 0)^T$. Тогда вектор $B\mathbf{f}_1 = (-1, -2, -3)^T$ уже образует базис в N_1 . Жорданова лестница имеет вид

N_2	f_1
N_1	Bf_1

Часть жорданова базиса:

$$e_1 = Bf_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где e_1 — собственный вектор, e_2 — его присоединенный вектор. Первый и второй столбцы матрицы оператора A' имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda_2 = 1$. В этом случае матрица

$$B = (A - \lambda_2 I) = (A - I) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r_1 = 2$, поэтому ее ядро состоит из одного вектора, например, $e_3 = (1, 1, 1)^T$, который является собственным вектором. При этом $m_2 = s_2 = 1$.

Итак, e_1, e_2, e_3 — жорданов базис и

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Пример 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 4. т.е. $m = 4$. Рассмотрим матрицу

$$B = A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

ее ранг равен $r_1 = 1$ и¹

$$N_1 = \ker B = L \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_1 = 3.$$

Поскольку

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеем

$$n_2 = 4, \quad N_2 = \ker B^2 = \mathbb{R}^4.$$

Дополним базис пространства N_1 до базиса пространства N_2 ; для этого возьмем какой-либо вектор $\mathbf{f} \in N_2$, $\mathbf{f} \notin N_1$, например, $\mathbf{f} = (0, 0, 0, 1)^T$; он является присоединенным вектором высоты 2. Вектор $B\mathbf{f} = (-1, -1, 0, 0)^T \in N_1$ является присоединенным вектором высоты 1, т.е. собственным вектором. Для построения базиса требуется еще два вектора $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$, которые выбираются из N_1 . Для их правильного выбора проанализируем линейные зависимости между столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(первые три столбца этой матрицы — это базис N_1 , последний столбец — вектор $B\mathbf{f}$). Приводя эту матрицу методом Гаусса к упрощенной форме,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

видим, что вектор $B\mathbf{f}$ линейно выражается через первые два столбца этой матрицы. Поэтому второй и третий столбцы можно взять в качестве $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$:

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, жорданова лестница имеет вид

N_2	$\mathbf{f}$		
N_1	$B\mathbf{f}$	$\mathbf{g}_1$	$\mathbf{g}_2$

¹Через $L\{\}$ обозначена линейная оболочка стоящих в фигурных скобках векторов, которые образуют ее базис.

Жорданов базис состоит из векторов

$$\mathbf{e}_1 = B\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма матрицы оператора:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Пример 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3 - \lambda & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^4$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 4, т.е. $m = 4$. Рассмотрим матрицу $B = A - \lambda I$, ее последовательные степени и их ядра:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 2, \quad N_1 = L \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_1 = 2, \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 1, \quad N_2 = L \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_2 = 3; \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = 0, \quad N_3 = \mathbb{R}^4, \quad n_3 = 4. \end{aligned}$$

Возьмем какой-либо вектор $\mathbf{f} \in N_3$, $\mathbf{f} \notin N_2$, например, $\mathbf{f} = (0, 0, 0, 1)^T$. Он является присоединенным вектором высоты 3. Вектор

$$B\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_2$$

является присоединенным вектором высоты 2, а вектор

$$B^2 \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_1$$

— присоединенным вектором высоты 1, т.е. собственным вектором.

Таким образом, мы построили три вектора жорданова базиса: $\mathbf{e}_1 = B^2 \mathbf{f}$, $\mathbf{e}_2 = B \mathbf{f}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}$. Требуется построить еще один вектор; выберем его из пространства $N_1 = \ker B$ так, чтобы он был линейно независим с построенными ранее векторами $\mathbf{f}$, $B \mathbf{f}$, $B^2 \mathbf{f}$, например,

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, жорданова лестница имеет вид

N_3	$\mathbf{f}$	
N_2	$B \mathbf{f}$	
N_1	$B^2 \mathbf{f}$	$\mathbf{g}$

Жорданов базис состоит из векторов

$$\mathbf{e}_1 = B^2 \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = B \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а матрица оператора в жордановом базисе имеет вид

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Пример 6.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1 - \lambda & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^4$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 4, т.е. $m = 4$. Рассмотрим матрицу $B = A - \lambda I$, ее степени и их ядра:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 2, \quad N_1 = L \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_1 = 2,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 0, \quad N_2 = \mathbb{R}^4, \quad n_2 = 4.$$

Выберем два вектора $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in N_2$, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \notin N_1$:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Они являются присоединенными векторами высоты 2; соответствующие собственные векторы

$$B\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

лежат в пространстве N_1 . Жорданова лестница имеет вид

N_2	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$
N_1	$B\mathbf{f}_1$	$B\mathbf{f}_2$

Построенные четыре вектора образуют жорданов базис:

$$\mathbf{e}_1 = B\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = B\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора в жордановом базисе

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Пример 7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 - \lambda & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^4$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 4, т.е. $m = 4$. Рассмотрим матрицу $B = A - \lambda I$, ее последовательные степени и их ядра:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & r_1 &= 3, & N_1 &= L \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, & n_1 &= 1, \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & r_2 &= 2, & N_2 &= L \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, & n_2 &= 2, \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & r_3 &= 1, & N_3 &= L \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, & n_3 &= 3, \\ B^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & r_4 &= 0, & N_4 &= \mathbb{R}^4, & n_4 &= 4. \end{aligned}$$

Выберем вектор $\mathbf{f} \in N_4$, $\mathbf{f} \notin N_3$, например,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Он является присоединенным вектором высоты 4 и порождает цепочку векторов

$$B\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_3, \quad B^2\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_2, \quad B^3\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_1;$$

$B\mathbf{f}$, $B^2\mathbf{f}$ — присоединенные векторы высоты 3 и 2 соответственно, $B^3\mathbf{f}$ — собственный вектор. Таким образом, жорданова лестница имеет вид

N_4	$\mathbf{f}$
N_3	$B\mathbf{f}$
N_2	$B^2\mathbf{f}$
N_1	$B^3\mathbf{f}$

Жорданов базис состоит из векторов $\mathbf{e}_1 = B^3 \mathbf{f}$, $\mathbf{e}_2 = B^2 \mathbf{f}$, $\mathbf{e}_3 = B \mathbf{f}$, $\mathbf{e}_4 = \mathbf{f}$; матрица оператора имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 5 - \lambda & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 (3 - \lambda)^2$$

имеет два корня: $\lambda_1 = 2$ кратности $m_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$ кратности $m_2 = 2$.

Рассмотрим собственное значение $\lambda_1 = 2$. Рассмотрим матрицу $B_1 = A - \lambda_1 I = A - 2I$, ее последовательные степени и их ядра²:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 2, \quad N_1 = L \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_1 = 2,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 & -11 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 2, \quad N_2 = L \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_2 = 2.$$

Таким образом, $q = 1$, и мы выбираем два вектора $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in N_2$, которые являются собственными векторами:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы образуют часть жорданова базиса, которой отвечают две жордановых клетки порядка 1 каждая:

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{2} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{2} \end{array} \right).$$

²Для краткости будем обозначать эту матрицу просто через B .

Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda_2 = 3$, соответствующую матрицу $B_2 = A - \lambda_2 I = A - 3I$, ее последовательные степени и их ядра³:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} -3 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 3, & N_1 &= L \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, & n_1 &= 1, \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 2, & N_2 &= L \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & n_2 &= 2, \\ B^3 &= \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5 & -7 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = r_2 = 2, & & & n_3 &= 2. \end{aligned}$$

Таким образом, $q = 2$.

Выберем вектор $\mathbf{g} \in N_2$, $\mathbf{g} \notin N_1$, например,

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

он является присоединенным вектором высоты 2 и порождает вектор

$$B\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

который является присоединенным вектором высоты 1, т.е. собственным вектором.

Жорданов базис состоит из векторов

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = B\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора в жордановом базисе имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}.$$

³Как и ранее, для краткости будем обозначать эту матрицу просто через B .

§4. Другой способ построения жорданова базиса

Можно строить жорданов базис, начиная с собственных векторов, решая систему

$$(A - \lambda I)X = O \quad (3)$$

для нахождения собственных векторов, систему

$$(A - \lambda I)Y = X \quad (4)$$

для нахождения присоединенных векторов высоты 1 и т. д. Трудность заключается в том, что система (4) может оказаться разрешимой не при любом собственном векторе X (если собственное подпространство не одномерно), так что приходится заботиться о надлежащем выборе этого собственного вектора, что приводит к решению систем линейных уравнений с параметром. Эта трудность усугубляется в случае, когда собственному вектору отвечает длинная цепочка присоединенных векторов.

Пример 1. Дана матрица оператора в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^3 = 0$$

имеет корень $\lambda = 3$ кратности $m = 3$. Система (3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x^1 = 0$, а x^2, x^3 произвольны. Значит, собственные векторы имеют вид

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где C_1 и C_2 — произвольные числа, не равные нулю одновременно. Линейно независимых собственных векторов два, так что геометрическая кратность данного собственного значения $s = 2$. Остается найти $m - s = 1$ присоединенный вектор. Он должен удовлетворять уравнению (4). Подставляя в (4) $\lambda = 3$ и найденный X из (5), получим систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Эта система совместна, если выполнены условия теоремы Кронекера—Капелли:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 3 & 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Достаточно найти одно из решений системы (6), например,

$$Y = \begin{pmatrix} C_2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

это и будет вектор, присоединенный к собственному вектору

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Выберем $C_2 = 3$. Жорданов базис будет состоять из собственного вектора

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

присоединенного к нему вектора

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и еще одного собственного вектора, линейно независимого с e_1 , например,

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе матрица оператора имеет жорданову форму

$$A_e = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{3} \end{pmatrix}.$$

Жорданова клетка

$$J_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует собственному вектору e_1 и присоединенному к нему вектору e_2 , жорданова клетка

$$J_2 = (3)$$

соответствует собственному вектору e_3 .

Пример 2. Матрица оператора в некотором базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Оператор имеет собственное значение $\lambda = -1$ алгебраической кратности $m = 3$ и геометрической кратности $s = 1$. Собственные векторы:

$$X = C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C \neq 0.$$

Остается найти $m - s = 2$ присоединенных к X вектора из условий

$$(A - \lambda I)Y = X, \quad (7)$$

$$(A - \lambda I)Z = Y. \quad (8)$$

Система (7) совместна при всех C . Из (7) определяем

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ C/2 \\ -C/2 \end{pmatrix}.$$

Система (8) также совместна при всех C . Из (8) находим

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -C/4 \\ 5C/4 \end{pmatrix}.$$

Выбрав $C = 4$, построим жорданов базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма матрицы оператора

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

состоит из одной жордановой клетки.

Пример 3. Матрица оператора в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$ кратности $m_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$ кратности $m_2 = 2$. Собственному значению $\lambda_1 = 1$ отвечают собственные векторы

$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 \neq 0,$$

т.е. геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 1$ равна 1. Присоединенный к X_1 вектор Y_1 находится из системы

$$(A - \lambda_1 I)Y_1 = X_1,$$

которая совместна при всех C_1 . Например,

$$Y_1 = \begin{pmatrix} C_1/2 \\ 0 \\ C_1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Удобно положить $C_1 = 2$.

Корню $\lambda_2 = -1$ отвечают собственные векторы

$$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 \neq 0,$$

т.е. геометрическая кратность собственного значения $\lambda_2 = 1$ равна 1. Присоединенный к X_2 вектор Y_2 находится из системы

$$(A - \lambda_2 I)Y_2 = X_2,$$

совместной при всех C_2 . Например,

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -C_2/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Удобно положить $C_2 = 4$.

Теперь строим жорданов базис:

$$e_1 = X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма матрицы оператора:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Пример 4. Матрица оператора в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = 0$ кратности $m = 4$. Собственные векторы имеют вид:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_1^2 + C_2^2 \neq 0,$$

т.е. геометрическая кратность собственного значения $s = 2$. Остается найти $m - s = 2$ присоединенных векторов. При этом возможны два случая: оба присоединенных вектора

относятся к одному и тому же собственному вектору либо разным собственным векторам. Жорданова форма матрицы может иметь один из следующих видов:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array} \right) \quad \text{либо} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array} \right). \quad (9)$$

Будем искать присоединенный вектор Y из уравнения (4). В отличие от системы (6) из примера 1, для системы (4) в данном примере условие совместности выполнено при всех значениях C_1 и C_2 . Это значит, что присоединенные векторы существуют для всех собственных векторов, в частности, для каждого из двух линейно независимых собственных векторов будет существовать присоединенный вектор. Значит, в данном примере реализуется жорданова форма с двумя клетками порядка 2 каждая. Частное решение системы (4) имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} C_1/3 + 7C_2/6 \\ 0 \\ 3C_2/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построим жорданов базис. Положив $C_1 = 3$, $C_2 = 0$, получим собственный вектор

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и присоединенный к нему вектор

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Положив $C_1 = 0$, $C_2 = 6$, получим собственный вектор

$$e_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}$$

и присоединенный к нему вектор

$$e_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы e_1 , e_2 , e_3 , e_4 образуют жорданов базис, в котором матрица оператора

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

§5. Задачи для самостоятельного решения

Привести матрицу линейного оператора к жордановой форме. Построить канонический базис. Для контроля правильности построения канонического базиса воспользоваться соотношением $PA' = AP$, где A — данная матрица, A' — жорданова форма матрицы, P — матрица перехода к каноническому базису.

$$1. \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 & 7 \\ -1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$6. \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 & 8 \\ -1 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$8. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$10. \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$11. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -13 \\ -1 & 5 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 8 \\ -2 & 7 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$14. \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 & 10 \\ -3 & 8 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответы

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$8. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$10. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$11. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$14. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$